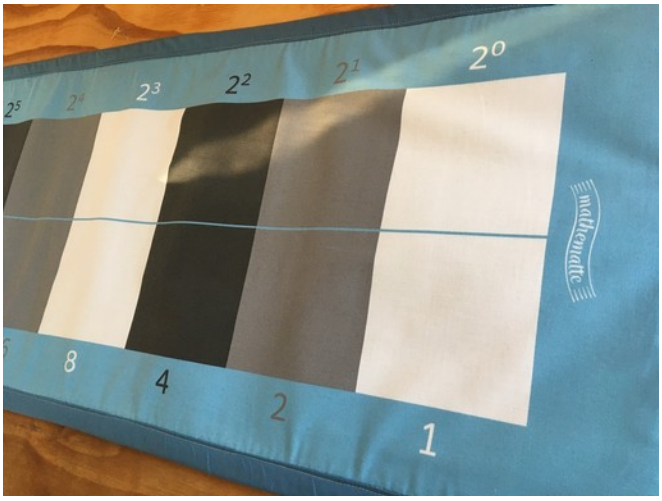
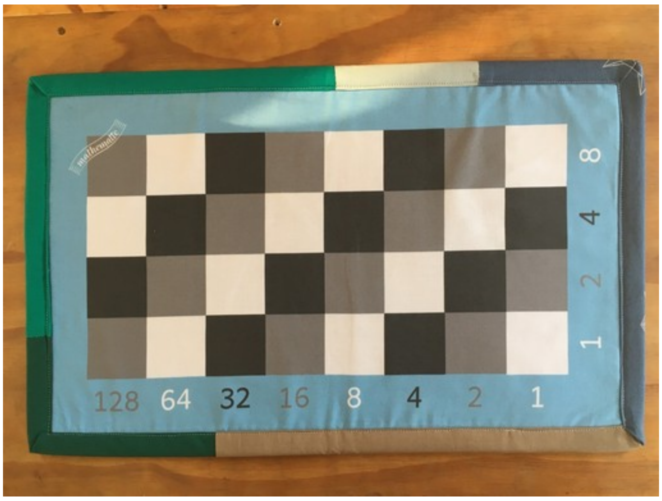
Anleitung Binäre Zahlen mit dem Binärteppich und dem Binärmalteppich

Version vom 5.4.20 von Luise Haeggqwist
www.mathematte.de

Ich habe zwei Teppiche zum Arbeiten mit binären Zahlen in meinem Sortiment. Einmal den Binärteppich, mit dem man binäre Zahlen in dezimale Zahlen umrechnen kann und umgekehrt. Außerdem kann man mit diesem Teppich binäre Zahlen addieren und subtrahieren. Dann noch den Binärmalteppich. Er entspricht dem Dezimalschachbrett oder Multiplikationsbrett oder -teppich im Dezimalsystem und ist primär zum Multiplizieren binärer Zahlen gedacht.



Binärteppich



Binärmalteppich

Binäre Zahlen sind ein spannendes Thema, was im Zuge der Digitalisierung einen immer größer werdenden Stellenwert in unserer Grundbildung einnehmen sollte. Viele Menschen benutzen Smartphones und Computer ohne irgendetwas darüber zu wissen, wie es innen in diesen Geräten aussieht.

Deswegen schadet es nicht, sich mit dem nativen Zahlensystem der digitalen Welt, dem Binärsystem, spielerisch auseinander zu setzen. Das Material kann zur Einführung der binären Zahlen genauso gut in der Grundschule benutzt werden wie im Sekundarbereich, wo es im Informatikunterricht seinen Platz hat.

Generell ist es auch so, das man viel über das eigene (dezimale) Zahlensystem lernen kann, wenn man alle Zusammenhänge mal aus der Sicht eines anderen Zahlensystems betrachtet. Die Teppiche können genauso gut auch für die Untersuchung anderer Zahlensysteme benutzt werden, wenn man die Zahlen ‚umlabelt‘.

1. Binäre Zahlen kennenlernen

Es ist gut, sich erstmal Gedanken darum zu machen, was ein Stellenwertsystem ist. Im dezimalen Stellenwertsystem ist jeder Stelle in einer Zahl eine Potenz der 10 zugeordnet. Und jede Stelle kann bis zu neun Mal besetzt sein, deswegen haben wir Ziffern von 0 bis 9.

10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
1	10	100	1000	10000

3 2 5

100er 10er 1er

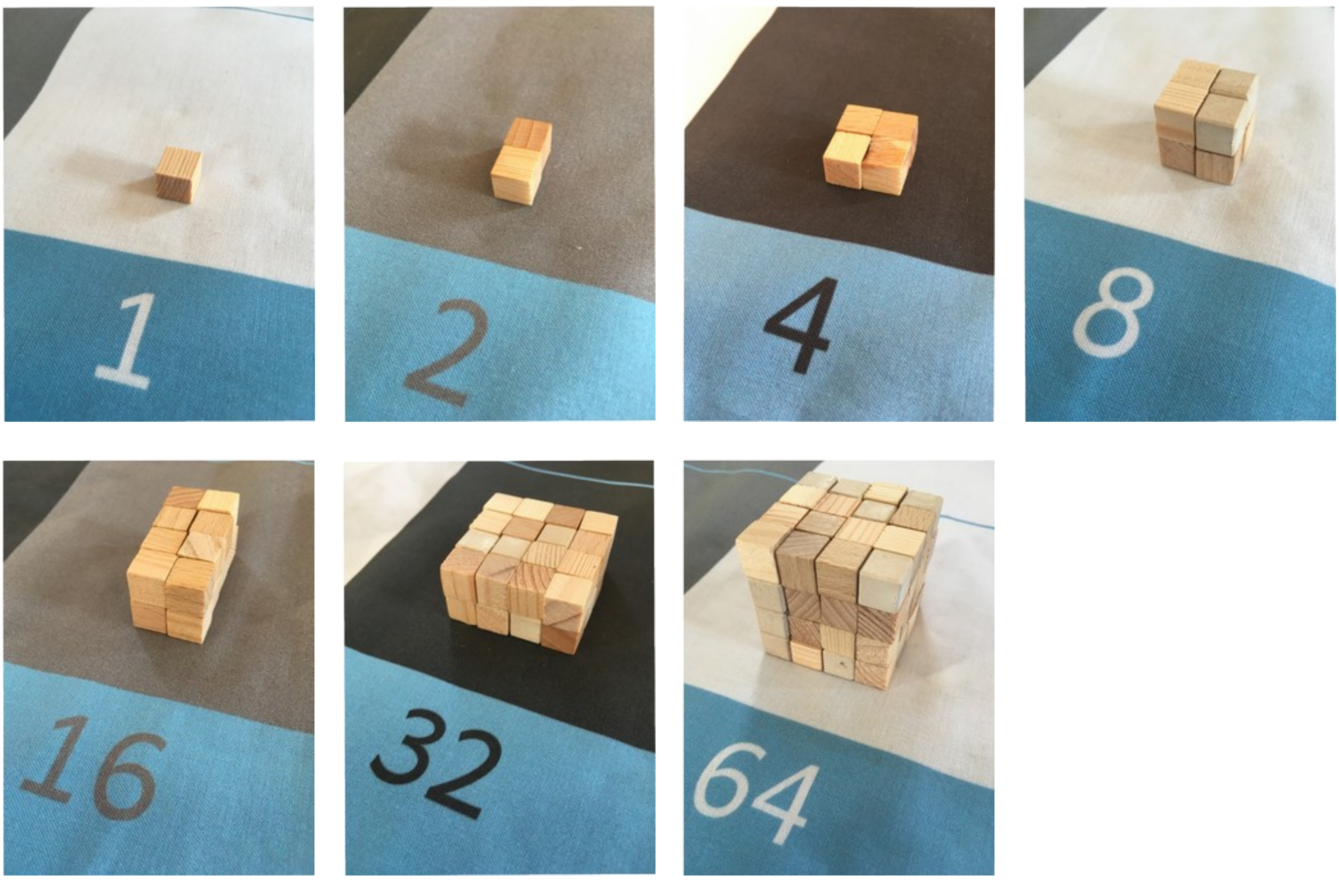
Das Binärsystem funktioniert genauso, aber jede Stelle entspricht einer Potenz der 2. Dabei bedeutet z.B. die dritte Potenz der 2, das ich die 2 dreimal mit sich selbst malnehme: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Hier gibt es nur die Ziffern 0 und 1, das heißt jede Stelle kann einmal besetzt sein.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
1	2	4	8	16

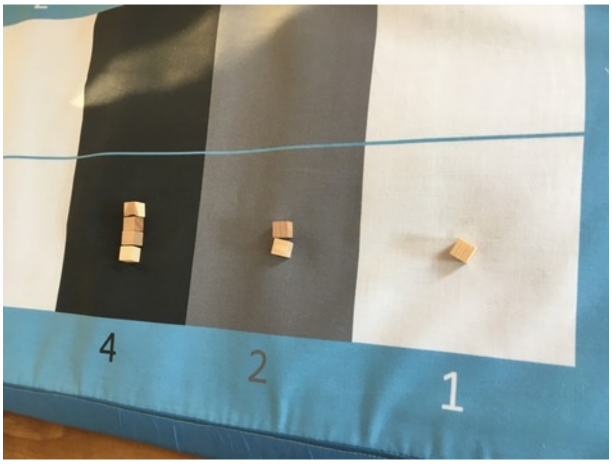
1 1 0 1

8er 4er 2er 1er

Genau wie im Dezimalsystem können wir die Potenzen als sich wiederholende Reihe von Würfeln, Stangen und Quadraten zusammenpacken, dies sieht man hier:

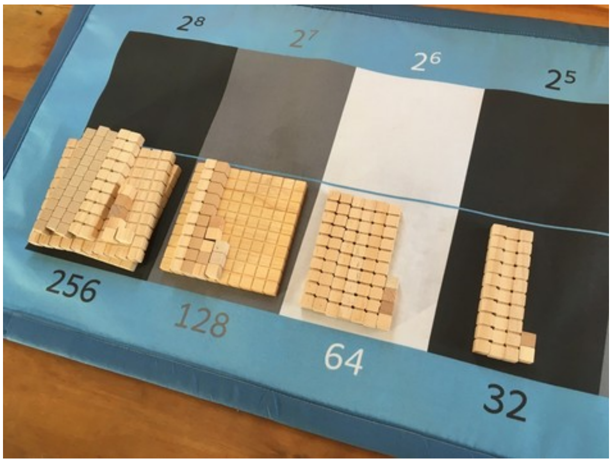


2. Dezimale Zahlen in binäre Zahlen umrechnen



Um nun dezimale Zahlen in binäre Zahlen umzurechnen, legen wir einfach auf den jeweiligen Feldern die entsprechende Menge an goldenem Perlenmaterial oder Dienesmaterial hin. Ich beginne bei der 1 mit einem Würfel und erkläre beim Fortschreiten, dass sich die Werte immer verdoppeln. Das können schon relativ junge Kinder!

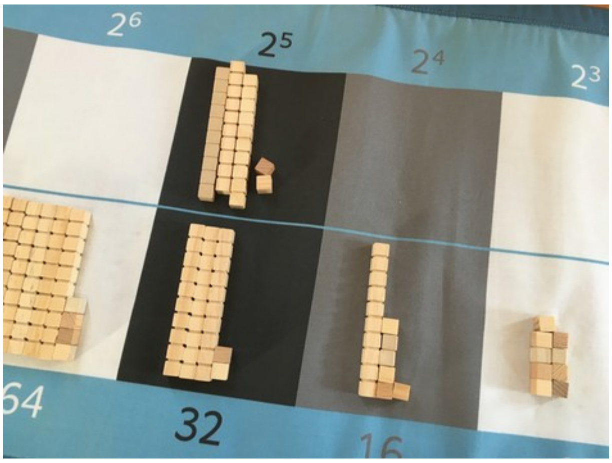
Weiter zu den größeren Zahlen, bei der 16 kommt nun auch eine 10er-Stange hinzu. Nebenbei kann ich auch erläutern, was es mit der Potenzschreibweise auf sich hat, die Potenzen stehen über den oberen Feldern und entsprechen der Zahl, die unten steht.



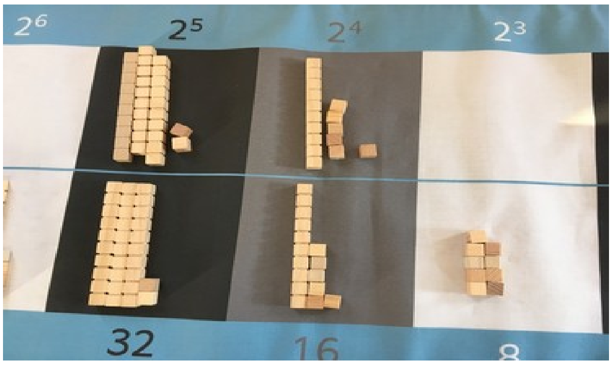
Der Teppich reicht bis zur 8.Potenz, der 256. Wenn Kinder wollen, können sie auch anbauen, je nachdem wie viel Material vorhanden ist.Zur Anschauung benutze ich gerne dieses Material, aber man könnte es natürlich auch mit Marken oder Murmeln legen.

Nun fange ich an, umzurechnen. Dazu erkläre ich vorher, das jedes Zahlensystem die Eigenschaft hat, das man eine Zahl auf genau eine Art und Weise darstellen kann. Die Zahl 312 z.B. kann ich im Dezimalsystem nur mit 3 Hundertern, einem Zehner und zwei Einern darstellen und durch keine andere Kombination von Hundertern, Zehnern und Einern. Im Binärsystem ist das genauso, und deswegen gibt es eine einfache Methode, die ich jetzt zeige.

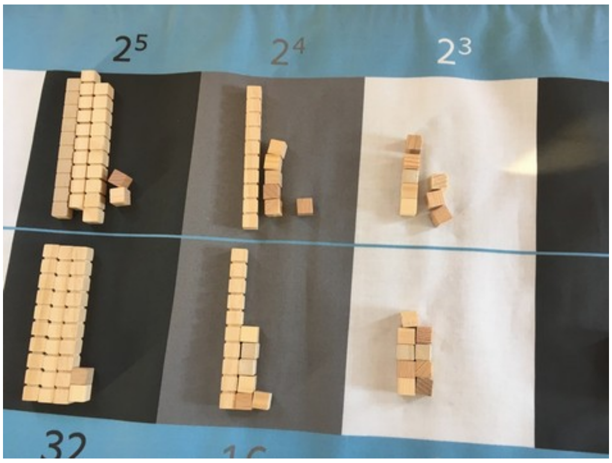
Die Aufgabe ist es, die Zahl 57 in eine Binärzahl umzurechnen. Ich lege mir erstmal meine Dezimalzahl, die ich umrechnen möchte, in Stangen und Würfelchen hin.



Ich habe also 5 Zehner und 7 Einer. Nun suche ich den größten Stellenwert, der in die 57 „hineinpasst“. Die 256, die 128 und die 64 sind größer als die 57, die passen nicht hinein. Aber die 32 passt hinein. Ich nehme 32 aus den 57 heraus und lege sie ins passende obere Feld. Es bleiben von den 57 noch 25 übrig.

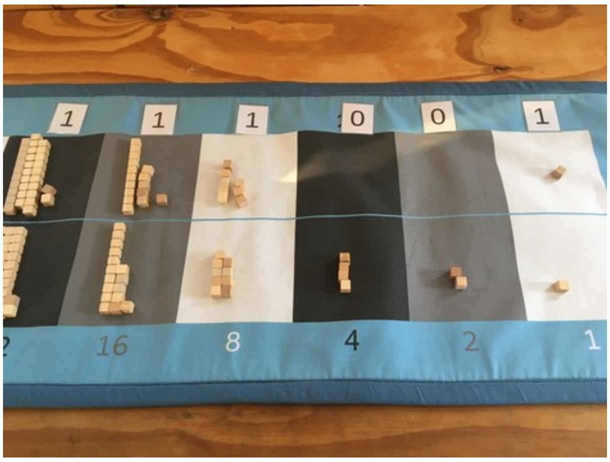


Die 16 passt.Es bleiben 9 übrig.



Auch die nächste Stelle, die 8 passt hinein.

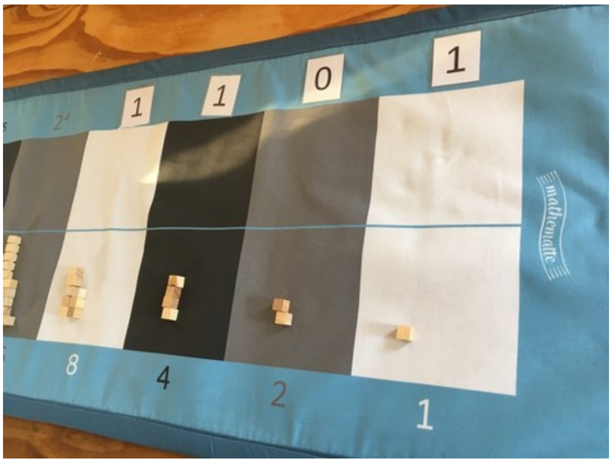
Nun ist nur noch einer übrig, der auf den Einerstellenwert gelegt werden kann.



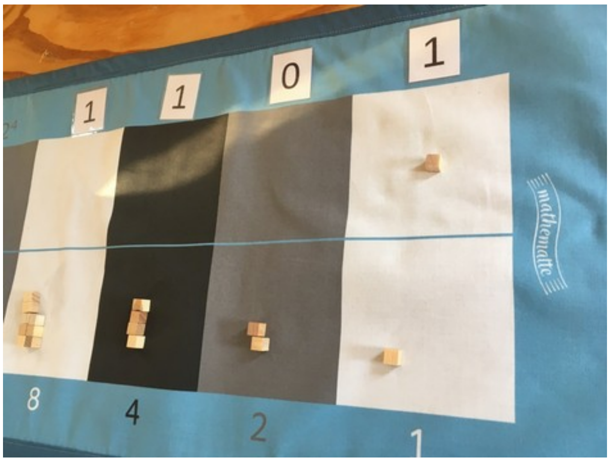
Jetzt bin ich mit dem Verteilen fertig. Jeder Stellenwert, der aufgefüllt wurde, entspricht einer „1“ im binären System, denn die Stelle wurde einmal besetzt. Die Stellenwerte, die nicht aufgefüllt wurden, bekommen eine Null, denn sie sind nicht besetzt. Jetzt kann ich die binäre Zahl, die der Dezimalzahl 57 entspricht, ablesen: **111001**

3. Binäre Zahlen in dezimale Zahlen umrechnen

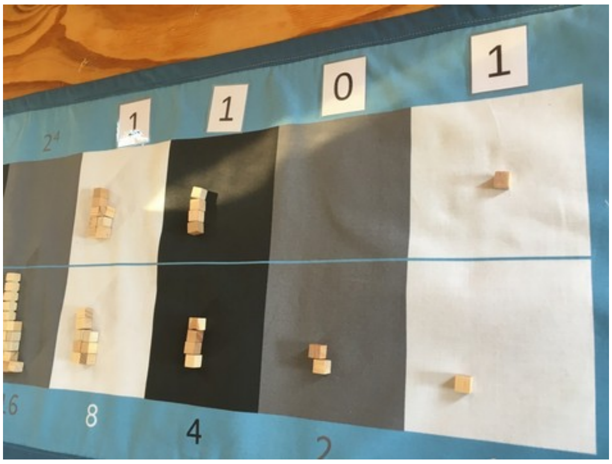
Jetzt will ich die binäre Zahl 1101 in die entsprechende Dezimalzahl umrechnen. Die Einsen und Nullen sagen mir, welche Stellenwerte besetzt sind.



Ich weiss also, welche Stellenwerte besetzt sein werden und lege mir die Ziffernkärtchen an die entsprechende Stelle auf dem Teppich.



Ich lege in die oberen Felder des Teppichs, die eine „1“ bekommen haben, so viel goldenes Perlenmaterial / Dienesmaterial auf, wie es dem Stellenwert entspricht, also genauso viele, wie im unteren Feld liegt. In diesem Fall lege ich einen Einer aufs obere Feld.

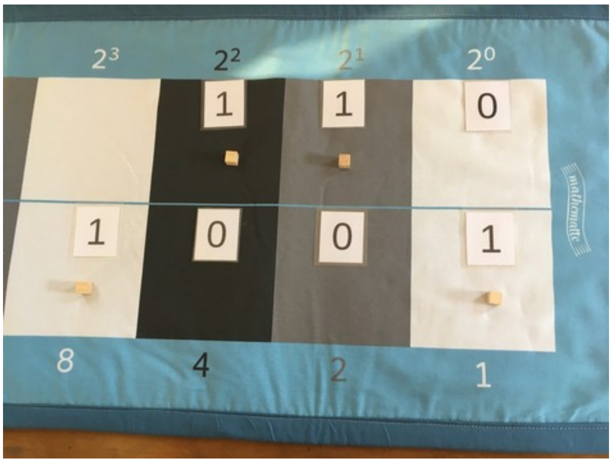


Unter die anderen beiden Einsen lege ich einmal 4 und einmal 8. Nun habe ich alle Stellenwerte mit Material ausgelegt.

Um nun die dezimale Zahl zu bekommen, lege ich mir das ganze Material aus den oberen Feldern zusammen hin. Nach dem Umtauschen erhalte ich die Zahl **13**!

4. Binäre Zahlen addieren

Jetzt geht es darum, sich im binären System zu bewegen. Dazu gehören vor allem die Grundrechenarten. Mit dem Binärteppich kann ich auch gut binäre Zahlen addieren und subtrahieren. Dazu nehme ich das in den unteren Feldern ausgelegte Material wieder weg, denn ich bewege mich jetzt nur noch im binären System und brauche die Stellenwertentsprechung nicht mehr.
Achtung: Das Material stellt jetzt nicht mehr den dezimalen Wert dar, sondern es gibt nur noch binäre „Einsen“ (ein Einer) und „Nullen“ (kein Einer)!

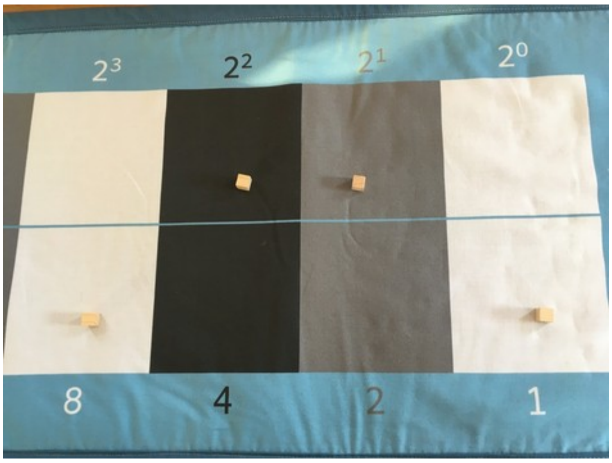


Ich möchte die Aufgabe

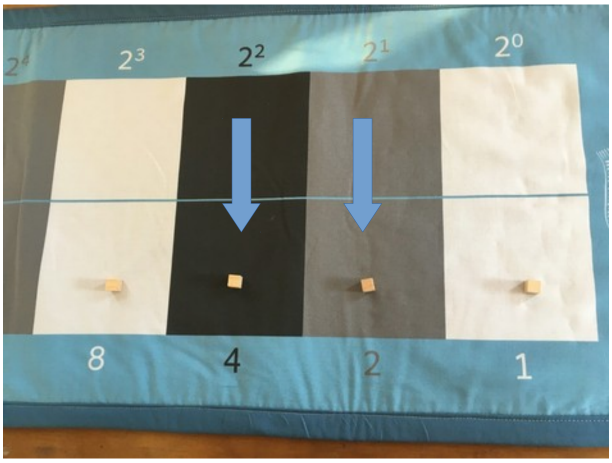
110 + 1001

rechnen.

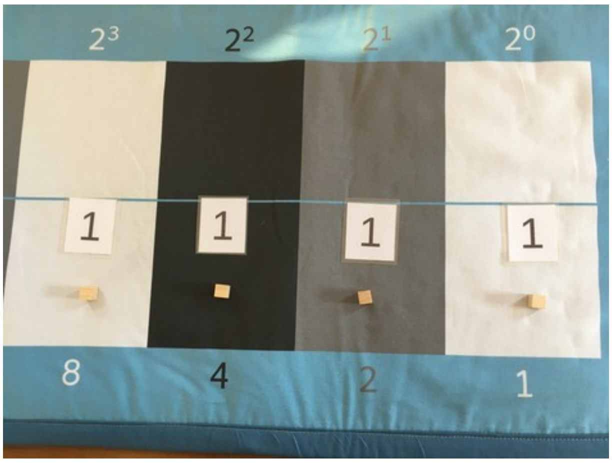
Ich lege die Ziffernkärtchen wie im Bild aus. Außerdem bekommt jede Eins einen Einer, um darzustellen, dass diese Stelle besetzt ist, und die Nullen bekommen gar nichts.



Ich kann jetzt die Ziffernkärtchen wegnehmen zum Rechnen.



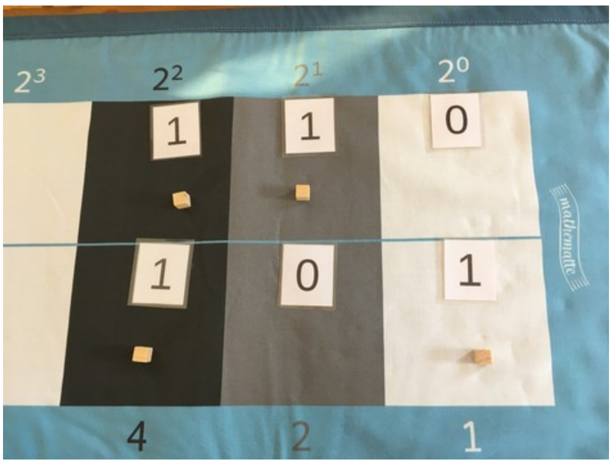
Addieren, also Plus rechnen, bedeutet immer, das ich alles zusammenschieben darf. Genauso wie im dezimalen System kann ich jeden Stellenwert erstmal für sich zusammenrechnen, also schiebe ich einfach alles von oben nach unten.



Weil ich keine Stellenwertübergänge habe in diesem Fall (also die Entsprechung zu Zehnerübergängen im Dezimalsystem), bin ich schon fertig und kann das Ergebnis ablesen, indem ich Ziffernkärtchen an die Felder lege:

1111

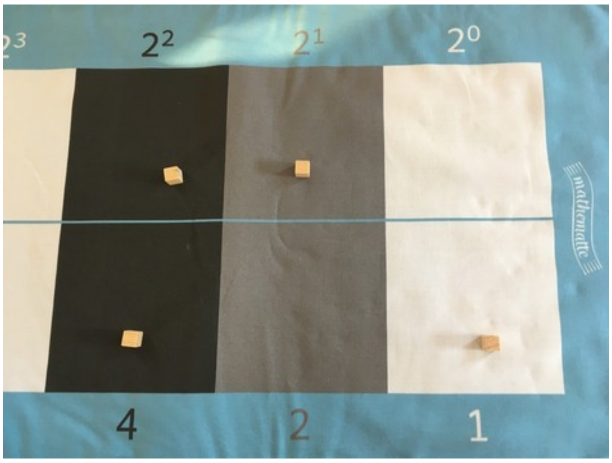
5. Binäre Zahlen addieren mit Stellenwertübergang



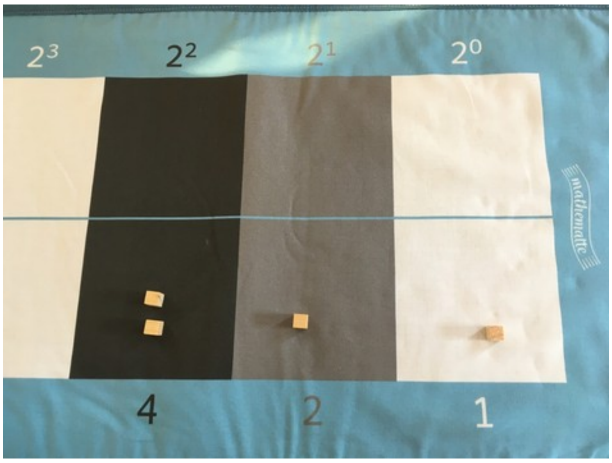
Nächstes Beispiel mit Übergang. Die Aufgabe:

110 + 101

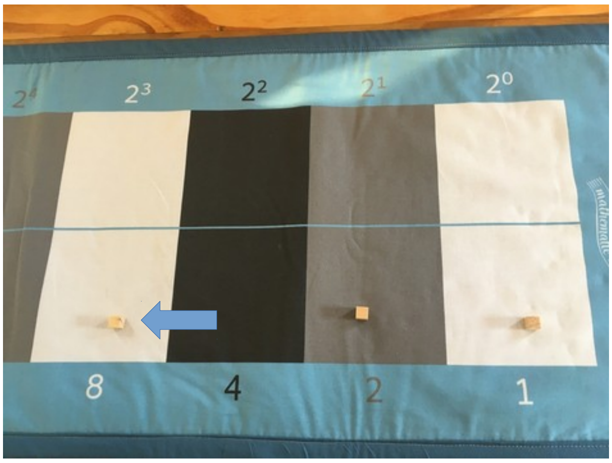
Ich lege erstmal wieder die Aufgabe aus.



Ziffernkärtchen entfernen...

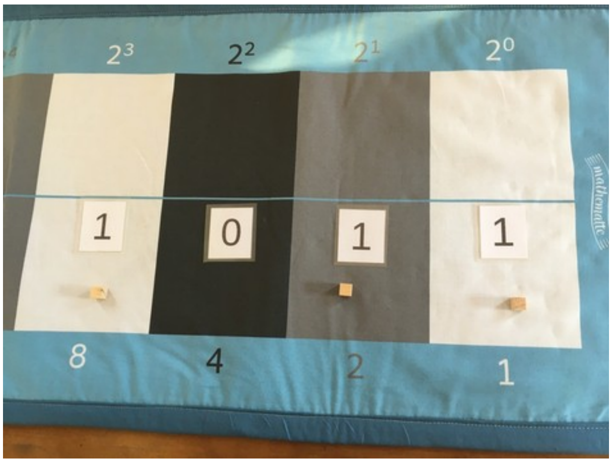


… und alle Einer von oben nach unten schieben…
Diesmal bin ich nicht fertig, weil im Vierer-Feld noch zwei Einer liegen. Im binären System gibt es ja nur die Eins oder die Null als Ziffer, und eine „Zwei“ darf nicht vorkommen.



Aber jede nachfolgende Stelle ist das doppelte der vorhergehenden Stelle (in diesem Fall ist 8 das doppelte der 4). Ich kann also die zwei Vierer umtauschen in einen Achter.

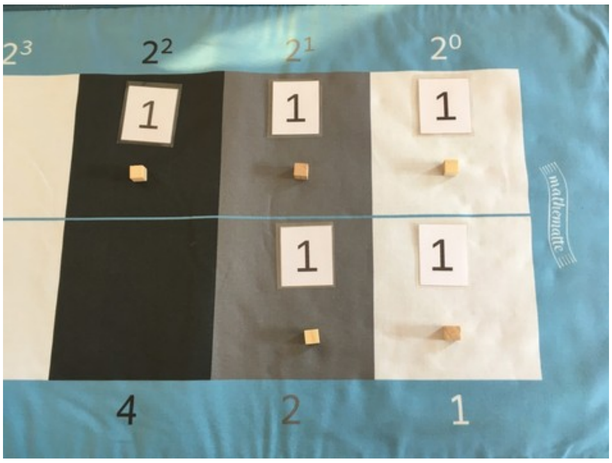
Allgemeine Regel: Ich darf immer, wenn ich zwei in einem Feld liegen haben, diese in einen Einer auf dem nächsthöheren Stellenwert umwandeln.



Jetzt bin ich fertig und kann die Zahl mit Ziffernkärtchen darstellen:

1011

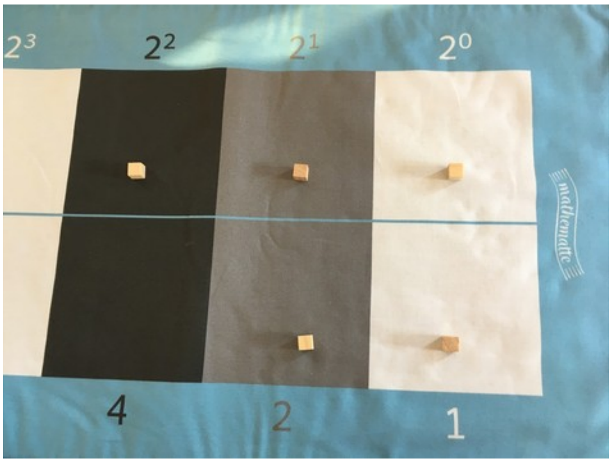
5. Binäre Zahlen subtrahieren ohne Stellenwertübergang



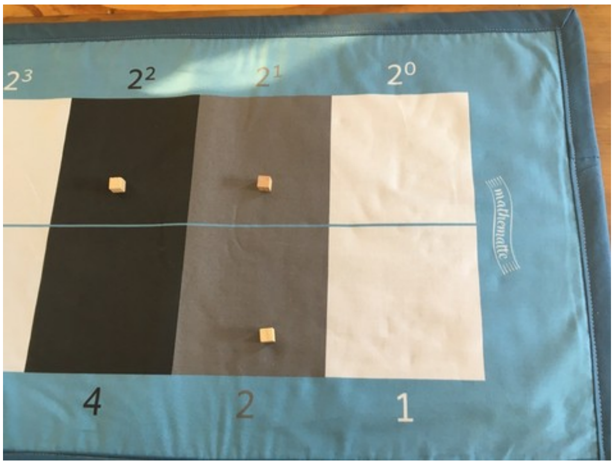
Ich rechne nun die Aufgabe:

111 – 11

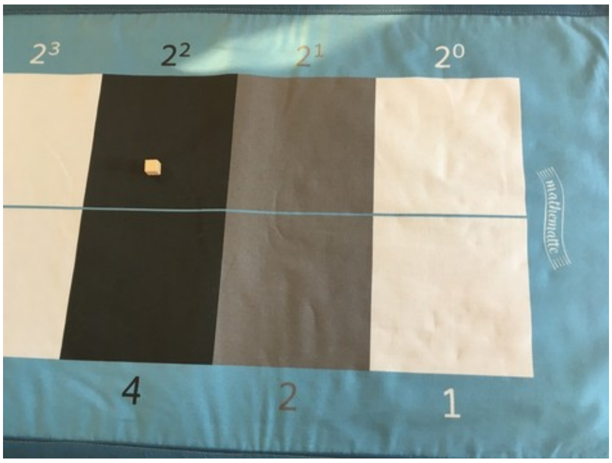
Den Minuend, also die Zahl, von der etwas abgezogen wird, lege ich oben hin. Der Subtrahend, also das was weggenommen wird, liegt in den unteren Feldern.



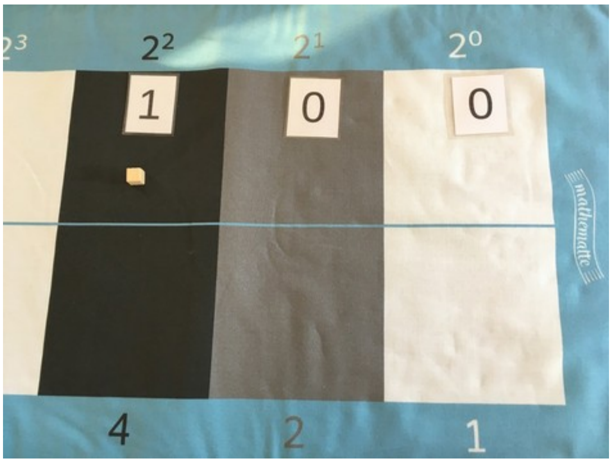
Die Ziffernkärtchen kommen wieder weg...



Die unteren Felder sagen mir, wieviel von den oberen Feldern weggenommen werden soll. Weil im unteren „Einer"-Feld ein Einer liegt, nehme ich den oberen Einer weg und entferne auch den unteren Einer, den diesen habe ich ja ‚erledigt'.



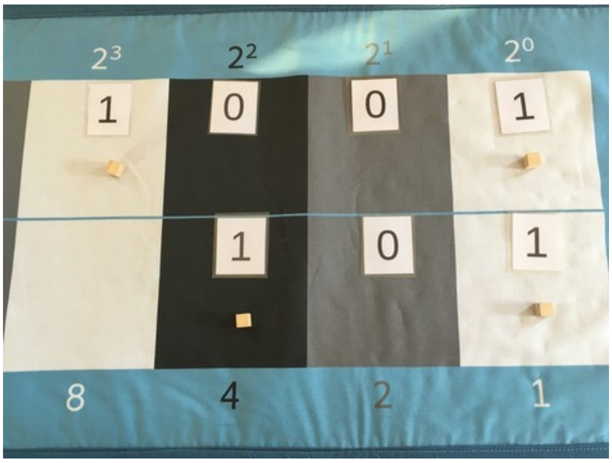
Genauso im Zweier-Stellenwert. Der Einer wird oben und unten entfernt



Das Ergebnis ist:

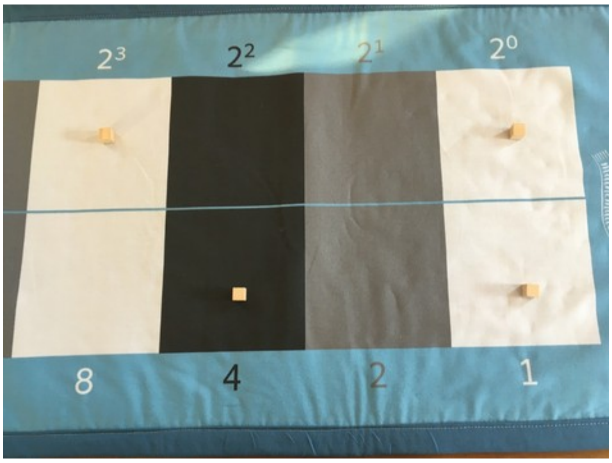
100

5. Binäre Zahlen subtrahieren mit Stellenwertübergang

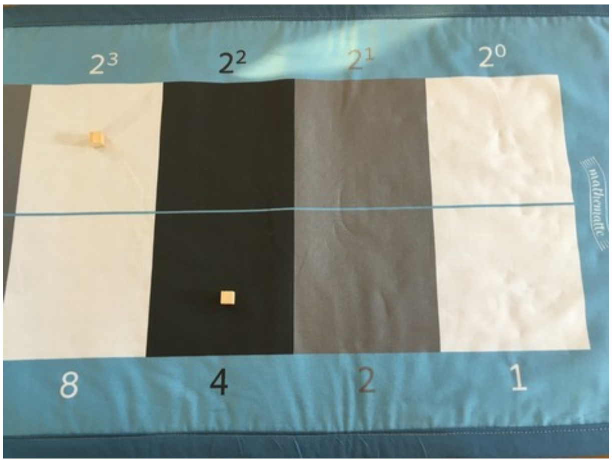


Jetzt rechne ich eine Aufgabe mit Stellenwertübergang. Die Aufgabe ist:

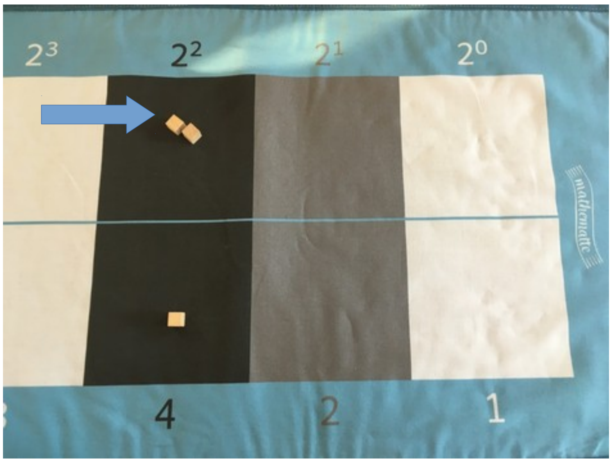
1001 – 101



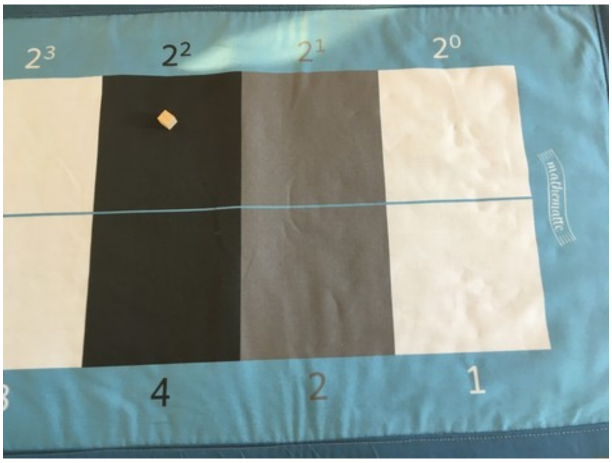
Die Ziffernkärtchen kommen weg.



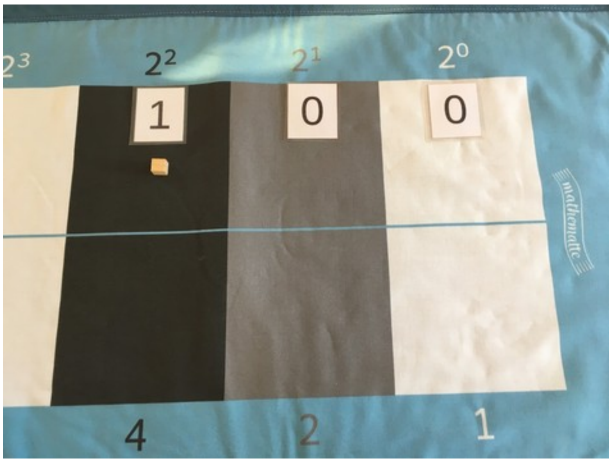
Die Einer kommen gleich weg, kein Problem. Aber auf dem Viererstellenwert kann man oben nicht den Einer wegnehmen...



Um auf der Viererstelle oben einen wegnehmen zu können, tausche ich mir den Einer auf der Achter-Stelle um in zwei Einer auf der Viererstelle.



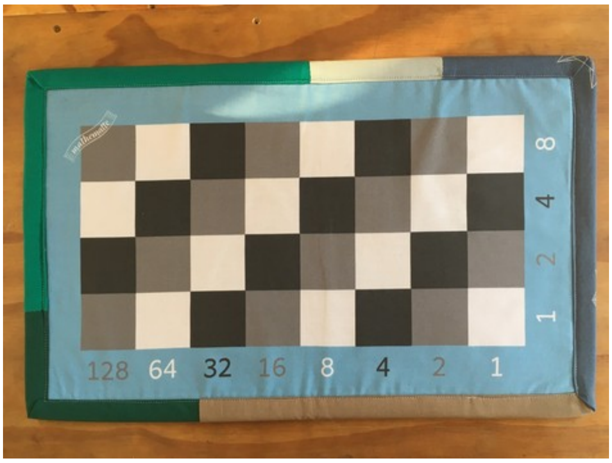
Jetzt kann ich ganz regulär oben und unten einen Einer wegnehmen und bin fertig.



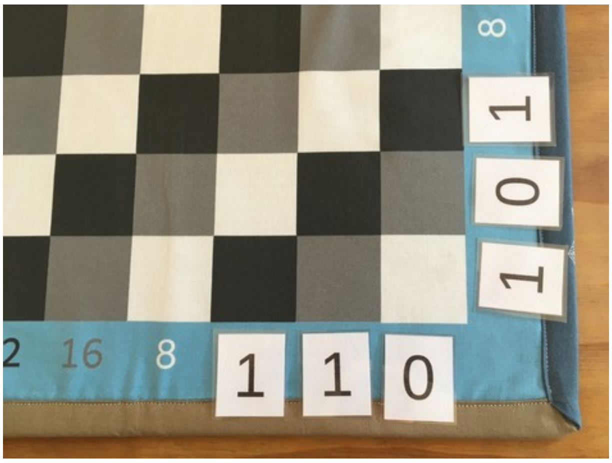
Das Ergebnis ist:

100

5. Binäre Zahlen multiplizieren

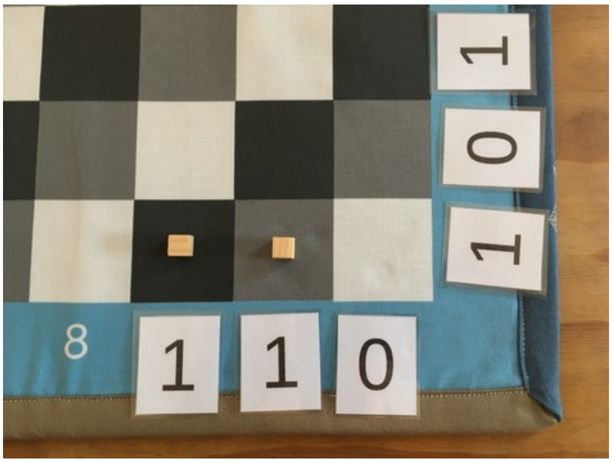


Der Binärmalteppich ist von der Struktur und Benutzung genau wie das dezimale Multiplikationsbrett oder Schachbrett, aber die Stellenwerte entsprechen den binären Stellenwerten.

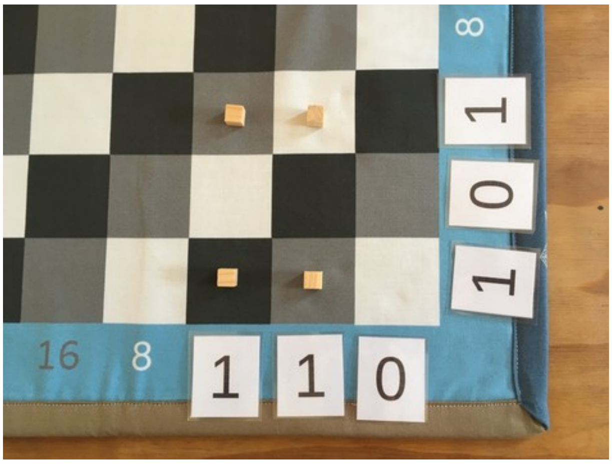


Nun werden die einzelnen Stellenwerte miteinander multipliziert, genau wie beim dezimalen Malteppich. Beim dezimalen Multiplizieren ist es dafür wichtig, das kleine Einmaleins zu können oder zumindest die Aufgaben mit den Perlen Stück für Stück legen zu können. Im dezimalen System gibt es 9 Ziffern (ohne die Null) und so gibt es 9x9 Aufgaben im kleinen Einmaleins. Im binären Einmaleins gibt es nur eine Aufgabe, denn es gibt nur eine Ziffer außer der Null: die Eins. Das binäre Einmaleins besteht tatsächlich nur aus der Aufgabe: 1x1!!!

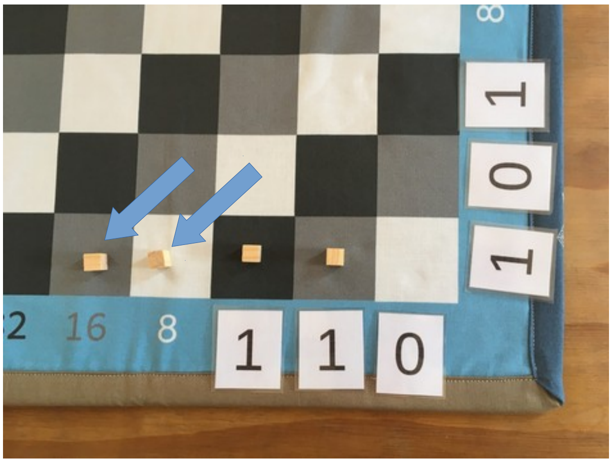
Zuerst gehe ich die unterste Reihe von rechts nach links durch.Im weißen Feld liegt nichts, weil Null mal Eins Null ergibt. Aber im untersten mittleren Feld erhalte ich eine Eins.



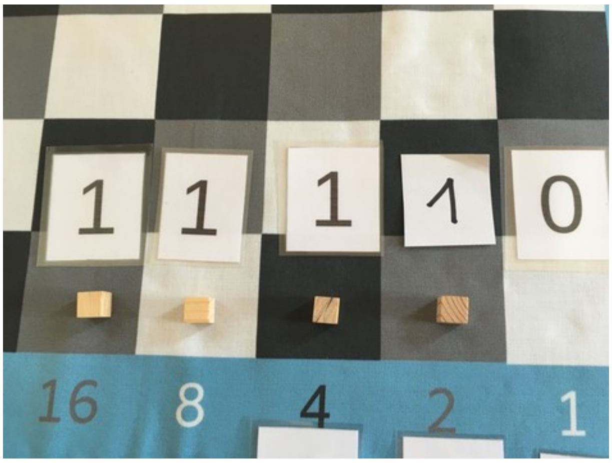
Auch im unteren schwarzen Feld erhalte ich eine Eins.



So mache ich reihenweise von rechts nach links weiter. Wenn alles multipliziert ist, sieht es so aus.



Nun kommt der Trick: ich darf alle diagonalen Felder, die von rechts oben nach links unten dieselbe Farbe (also den selben Stellenwert) besitzen, zusammenschieben.



Jetz kann ich mit Hilfe der Ziffernkarten das Ergebnis ablesen:

11110